Лекции по теме «Математическое моделирование»

1. Математические модели и их виды

Человек всегда принимал решения и всегда хотелось, чтобы они были правильными, оптимальными.

Предмет математические методы тесно переплетается с математическим моделированием, исследованием операций, так как в исследовании операций и математическое моделирование практически всегда используются математические методы решения задач, моделирования систем и анализа их характеристик.

Исследование операций – это использование математических и количественных методов для обоснования решения.

Исследование операций решает типичные экономические задачи:

1. План снабжения предприятия сырьем.

Задача. Имеется n предприятий, m баз с ресурсами, запасы каждой базы ограничены. Требуется разработать план снабжения предприятия сырьем при минимальных расходах при перевозке.

2. Закладка дороги.

Задача. Имеется заданное количество рабочих, машин, транспорта. Требуется спланировать строительство дороги в минимально возможные сроки.

3. Продажа сезонных товаров.

Задача. Для реализации сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется определить их число, размещение, запасы, количество персонала для получения максимальной прибыли.

4. Контроль продукции.

Задача. Выпускается определенный вид продукции. Для контроля качества организуется выборочная проверка. Требуется определить размер партии и правила проверки при минимальных расходах на контроль.

1.1. Оптимальное решение

Оптимизация – это выбор наилучшего решения. Математическая теория оптимизации включает в себя фундаментальные результаты и численные методы, позволяющие находить наилучший вариант из множества возможных альтернатив без их полного перебора и сравнения.

Принятие оптимальных решений базируется на «трех китах»:

- Математической модели;
- Решение задачи на компьютере;
- Исходных данных.

Математическое моделирование имеет два существенных преимущества: дает быстрый ответ на поставленный вопрос, предоставляет возможность широкого экспериментирования, осуществить которое на реальном объекте зачастую невозможно.

Для решения оптимизационных задач используются количественные методы решения. Применяют математический аппарат разной степени сложности: простые алгебраические уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных.

Алгоритмы задач принятия решений настолько сложны, что без компьютера решить их невозможно.

Исходные данные определяют успех дела в целом.

1.1.1. Основные понятия и определения оптимизации

Операция – это мероприятие, направленное на достижение какой-то цели.

РЕШЕНИЕ – это определенный набор зависящих от нас параметров и действий.

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ – это решение более предпочтительное перед другими по некоторому критерию.

ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕНИЯ – это те параметры, которые образуют решение задачи.

ПОКАЗАТЕЛЬ ЭФФЕКТИВНОСТИ – это некоторые количественные критерии, по которым сравнивают решения между собой, его называют целевой функцией. Обозначается W.

Примеры выбора показателя эффективности.

Задача 1: если P – суммарные расходы на перевозку сырья, то показатель эффективности $P \to \min$.

Задача 2: среднее ожидаемое время окончания стройки T, тогда показатель эффективности $T \to \min$.

Задача 3: П – прибыль от реализации продукции, критерий эффективности $T \to \max$.

В большинстве задач на практике критерий эффективности выбрать очень сложно, так как эффективность в реальной жизни определяется не одним критерием, а нескольким.

Все задачи можно разделить на прямы и обратные.

ПРЯМЫЕ задачи отвечают на вопрос: что будет, если в заданных условиях выбрать некоторое решение X.

ОБРАТНЫЕ задачи отвечают на вопрос: какое решение X надо выбрать, чтобы показатель эффективности W был max или min.

1.1.2. Постановка задачи оптимизации в общей форме

Пусть имеется некоторая операция O, на успех которой можно влиять, выбирая некоторым способом, решение X, эффективность операции характеризуется одним показателем $W \to \max$. Когда все условия операции O определены заранее, то все факторы, от которых зависит успех операции делятся на две категории: заданные, заранее известные факторы α; зависящие от нас элементы решения, которые образуют решения x.

Показатель эффективности зависит от обеих групп факторов и выражается формулой:

$W = W(\alpha, x)$, (*)

в общем случае α, x – векторы (совокупность чисел). Если зависимость (*) известна, то прямая задача решена.

Обратная задача формулируется так: при заданном комплексе условий α требуется найти такое решение $x = x^*$, которое обращает показатель эффективности W в max.

$W^* = \max\{W(\alpha, x)\}$, где W^*- мах. W^* - это максимальное значение эффективности при найденном оптимальном решении x^*.

1.1.3. Решение задачи оптимизации

Метод поиска экстремума и оптимального решения x^* ведется, исходя из особенностей функции W и вида ограничений, накладываемых на решение. Если W и ограничения линейные, то имеем задачу линейного программирования, которая решается стандартным методом (симплекс методом). Если W – выпукла функция, то применяют метод выпуклого программирования. Для многоэтажных задач используют метод динамического программирования. Для решения многомерных задач применяют численные методы.

1.1.4. Выбор решения в условиях неопределенности

Реальные задачи чаще всего создают неизвестные факторы е. В этом случае показатель эффективности зависит от трех групп факторов: $W = W(\alpha, x, e)$. Наличие неопределенных факторов е превращает задачу оптимизации в задачу о выборе решения в условиях неопределенности.

Задача 1. планируется ассортимент товаров для распродажи на ярмарке. Требуется получить максимальную прибыль. Неизвестно количество покупателей, их потребности.

Задача 2. проектируется система сооружений от паводков. Неизвестны моменты наступления и размеры.

1.1.5. Виды неопределенности.

1. неизвестный фактор е – случайная величина, статистические характеристики которой известны или могут быть получены, тогда имеем стохастическую задачу со стохастической неопределенностью.

Например: организуется работа магазина с целью повысить количество обслуживаемых покупателей, но неизвестны их количество, время посещения, требуемые товары, время обслуживания. Однако, все эти характеристики можно получить.

2. неизвестный фактор е не может быть получен и описан статистическим методами, тогда имеем не стохастическую неопределенность.

Например: проектируется информационно-вычислительная система для обслуживания случайных потоков запросов. Время существования запросов, их количество неизвестны, а получить вероятностные характеристики невозможно, так как система еще не создана.

В ситуациях с не стохастической неопределенностью полезно проводить предварительные расчеты. Кроме этого используют метод экспертных оценок, который используется в задачах прогнозирования. Его суть состоит в том, что вероятность события предлагают оценить экспертам, ответы обрабатывают как статистический материал. Полученные данные позволяют свести неопределенность к стохастической.

2. Линейное программирование

2.1. Виды задач линейного программирования

Термин ***линейное программирование*** появился в Америке в середине 40-х годов (первая американская работа по частной задаче линейного программирования опубликована в 1941 г.). В Советском Союзе исследования в этой области начались ранее. В конце 30-х годов целый ряд существенных результатов по линейному программированию был установлен Л.В. Канторовичем.

Задача линейного программирования – это задача нахождения значений параметров, обеспечивающих экстремум функции при наличии ограничений на аргументы.

Задачи линейного программирования являются самыми простыми и лучше изученными задачами. Для них характерно: показатель эффективности (целевая функция) выражается линейной зависимостью; ограничения на решения – линейные равенства или неравенства.

2.2. Трудности решения ЗЛП

Трудности решения задач линейного программирования зависят от: вида зависимости, связывающей целевую функцию с элементами решения; размерности задачи, то есть от количества элементов решения x1, x2,…, xn; вида и количества ограничений на элементы решений.

2.3. Классификация задач оптимизации

2.3.1. Задача о рациональном питании (задача о пищевом рационе)

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Ферма производит откорм скота с коммерческой целью. Для простоты допустим, что имеется всего четыре вида продуктов: $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$; стоимость единицы каждого продукта равна соответственно C_1, C_2, C_3, C_4. Из этих продуктов требуется составить пищевой рацион, который должен содержать: белков – не менее b_i единиц; углеводов – не менее b_2 единиц; жиров – не менее b_3 единиц. Для продуктов $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ содержание белков, углеводов и жиров (в единицах на единицу продукта) известно и задано в таблице, где a_{ij} (i=1,2,3,4; j=1,2,3) – какие – то определённые числа; первый индекс указывает номер продукта, второй – номер элемента (белки, углеводы, жиры).

продукт	элементы		
	белки	углеводы	жиры
$П_1$	A_{11}	A_{12}	A_{13}
$П_2$	A_{21}	A_{22}	A_{23}
$П_3$	A_{31}	A_{32}	A_{33}
$П_4$	A_{41}	A_{42}	A_{43}

Требуется составить такой пищевой рацион (т.е. назначить количества продуктов П$_1$, П$_2$, П$_3$, П$_4$, входящих в него), чтобы условия по белкам, углеводам и жирам были выполнены и при этом стоимость рациона была минимальна.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. Обозначим x_1, x_2, x_3, x_4 количества продуктов П$_1$, П$_2$, П$_3$, П$_4$, входящих в рацион. Показатель эффективности, который требуется минимизировать, - стоимость рациона (обозначим её L): она линейно зависит от элементов решения x_1, x_2, x_3, x_4.

Целевая функция: $L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = \sum_{i=1}^{4} cixi$

Система ограничений:

$$a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+a_{41}x_4 \geq b_1$$
$$a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3+a_{42}x_4 \geq b_2$$
$$a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{32}x_3+a_{43}x_4 \geq b_3$$

Эти линейные неравенства представляют собой ограничения, накладываемые на элементы решения x_1, x_2, x_3, x_4.

Таким образом, поставленная задача сводится к следующей: *найти такие неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, x_4, чтобы они удовлетворяли ограничениям – неравенствам и одновременно обращали в минимум линейную функцию этих переменных:*

$$L = \sum_{i=1}^{4} cixi \Rightarrow \min$$

2.3.2. Задача о планировании производства

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Предприятие производит изделия трёх видов: U$_1$, U$_2$, U$_3$. По каждому виду изделия предприятию спущен план, по которому оно обязано выпустить не мене b_1 единиц изделия U$_1$, не мене b_2 единиц изделия U$_2$ и не мене b_3 единиц изделия U$_3$. План может быть перевыполнен, но в определённых границах; условия спроса ограничивают количества произведённых единиц каждого типа: не более соответственно β_1, β_2, β_3 единиц. На изготовление изделий идёт какое-то сырьё; всего имеется четыре вида сырья: s_1, s_2, s_3, s_4, причём запасы ограничены числами γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 единиц каждого вида сырья. Теперь надо узнать какое количество сырья каждого вида идёт на изготовление каждого вида изделий. Обозначим a_{ij} количество единиц сырья вида s_i (I= 1, 2, 3, 4), потребное на изготовление одной единицы изделия U$_j$ (j= 1, 2, 3). Первый индекс у числа a_{ij} – вид изделия, второй – вид сырья. Значения a_{ij} сведены в таблицу (матрицу).

Сырьё	Изделия		
	U$_1$	U$_2$	U$_3$
S$_1$	a_{11}	a_{21}	a_{31}
S$_2$	a_{12}	a_{22}	a_{32}
S$_3$	a_{13}	a_{23}	a_{33}
S$_4$	a_{14}	a_{24}	a_{34}

При реализации одно изделие U_1 приносит предприятию прибыль c_1, U_2 – прибыль c_2, U_3 – прибыль c_3. Требуется так спланировать производство (сколько каких изделий производить), чтобы план был выполнен или перевыполнен (но при отсутствии «затоваривания»), а суммарная прибыль обращалась в максимум.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. Элементами решения будут x_1, x_2, x_3 – количества единиц изделий U_1, U_2, U_3, которые мы произведём. Обязательность выполнения планового задания запишется в виде трёх ограничений – неравенств: $x_1 \geq b_1$, $x_2 \geq b_2$, $x_3 \geq b_3$.

Отсутствие изделий продукции (затоваривания) даёт нам ещё три ограничения – неравенства: $x_1 \leq \beta_1$, $x_2 \leq \beta_2$, $x_3 \leq \beta_3$.

Целевая функция: $L = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \to \max$.

Система ограничений:

$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \leq \Upsilon_1$.
$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 \leq \Upsilon_2$.
$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \leq \Upsilon_3$.
$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 \leq \Upsilon_4$.

2.3.3. Задача о загрузки оборудования

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Ткацкая фабрика располагает двумя видами станков, из них N1 станков типа 1 и N2 станков типа 2. Станки могут производить три вида тканей: T1, T2, T3, но с разной производительностью. Данные a_{ij} производительности станков в таблице (первый индекс – тип станка, второй – вид ткани).

Каждый метр ткани вида T1 приносит фабрике доход c_1, вида T2 – доход c_2, T3 – доход c_3.

Тип станка	Вид ткани		
	T1	T2	T3
1 2	a_{11} a_{21}	a_{12} a_{22}	a_{13} a_{23}

Фабрике предписан план согласно которому она должна производить в месяц не менее b_1 метров ткани T1, b_2 метров ткани T2, b_3 метров ткани T3; количество метров каждого вида ткани не должно превышать соответственно β_1, β_2, β_3 метров. Кроме того, все без исключения станки должны быть загружены. Требуется так распределить загрузку станков производством тканей T1, T2, T3, чтобы суммарный месячный доход был максимален.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. Введём букву x с двумя индексами (первый – тип станка, второй – вид ткани). Всего будет шесть элементов решения: $x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{21}\ x_{22}\ x_{23}$.

Здесь x_{11} – количество станков типа 1, занятых изготовлением ткани T1, x_{12} – количество станков типа 1, занятых изготовлением ткани T2 и т.д.

Запишем суммарный доход от производства всех видов тканей. Суммарное количество метров ткани Т1, произведённое всеми станками, будет равно $a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}$ и принесёт доход $c_1(a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21})$.

Целевая функция: $L=c_1\ (a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21})+c_2\ (a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22})+c_3\ (a_{13}x_{13}+a_{23}x_{23}) = \sum_{j=1}^{3} cj \sum_{i=1}^{2} a_{ij}x_{ij} \rightarrow \max.$

Система ограничений:

Обеспечим выполнения плана ограничениями по минимальным параметрам:

$a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}\geq b_1,$
$a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}\geq b_2,$
$a_{13}x_{13}+a_{23}x_{23}\geq b_3,$

После этого ограничим выполнение плана по максимальным параметрам:

$a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}\leq \beta_1,$
$a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}\leq \beta_2,$
$a_{13}x_{13}+a_{23}x_{23}\leq \beta_3,$

Теперь запишем ограничения, связанные с наличием оборудования и его полной загрузкой. Суммарное количество станков типа 1, занятых изготовлением всех тканей, должно быть равно N1; типа 2 – N2.

$x_{11}+x_{12}+x_{13}=N1,$
$x_{21}+x_{22}+x_{23}=N2,$

2.3.4. Задача о снабжении сырьём

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Имеется три промышленных предприятия: $П_1$, $П_2$, $П_3$, требующих снабжения определённым видом сырья. Потребности в сырье каждого предприятия равны соответственно a_1, a_2, a_3 единиц. Имеются пять сырьевых баз, расположенных от предприятий на каких – то расстояниях и связанных с ними путями сообщения с разными тарифами. Единица сырья, получаемая предприятием $П_i$ с базы $Б_j$, обходится предприятию в c_{ij} рублей (первый индекс – номер предприятия, второй – номер базы).

Предприятия	Базы				
	$Б_1$	$Б_2$	$Б_3$	$Б_4$	$Б_5$
$П_1$	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
$П_2$	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}
$П_3$	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}	C_{35}

Возможности снабжения сырьём с каждой базы ограничены её производственной мощностью: базы $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$, $Б_4$, $Б_5$ могут дать не более b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 единиц сырья. Требуется составить такой план снабжения предприятий сырьём (с какой базы, куда и какое количество сырья везти), чтобы потребности предприятий были обеспечены при минимальных расходах на сырьё.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. Обозначим x_{ij} количества сырья с j – ой базы. Всего план будет состоять из 15 элементов решения: x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} x_{15} x_{21} x_{22} x_{23} x_{24} x_{25} x_{31} x_{32} x_{33} x_{34} x_{35}.

Целевая функция:

$$L=(c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{14}x_{14}+c_{15}x_{15})+(c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}+c_{24}x_{24}+c_{25}x_{25})+(c_{31}x_{31}+c_{32}x_{32}+c_{33}x_{33}+c_{34}x_{34}+c_{35}x_{35})=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{ij}\Rightarrow \min$$

Система ограничений:

$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=a_1$,
$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=a_2$,
$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=a_3$,
$x_{11}+x_{21}+x_{31}\le b_1$,
$x_{12}+x_{22}+x_{32}\le b_2$,
$x_{13}+x_{23}+x_{33}\le b_3$,
$x_{14}+x_{24}+x_{34}\le b_4$,
$x_{15}+x_{25}+x_{35}\le b_5$,

2.4. Основная задача линейного программирования

Любую задачу линейного программирования можно свести к стандартной форме, так называемой «основной задаче линейного программирования» (ОЗЛП), которая формируется так: найти неотрицательные значения переменные x_1, x_2, …, x_n, которые удовлетворяли бы условиям – равенствам:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \qquad (1.)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.
\end{aligned}$$

и обращали бы в максимум линейную функцию этих переменных:

$$L=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\Rightarrow \max. \quad (2.)$$

Случай, когда L надо обратить не в максимум, а в минимум, легко сводится к простому: изменить знак L на обратный (максимизировать не L, а L`=-L). Кроме того, от любых условий – неравенств можно перейти к условиям – равенствам ценой введения некоторых новых «дополнительных» переменных. Пусть требуется найти неотрицательные значения переменных x_1,x_2,x_3, удовлетворяющие ограничениям – неравенствам

$$\begin{aligned}
&3x_1+2x_2-x_3\ge 4, \qquad (3.)\\
&x_1-2x_2+3x_3\le 10
\end{aligned}$$

и обращающие в максимум линейную функцию от этих переменных:

$$L=4x_1-x_2+2x_3\Rightarrow \max. \quad (4.)$$

Начнём с того, что приведём условия (3.) к стандартной форме, так, чтобы знак неравенства был ≥, а справа стоял нуль. Получим:

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4 \geq 0, \qquad (5.)\\ &- x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10 \geq 0. \end{aligned}$$

А теперь обозначим левые части неравенств (6.5.) соответственно через y_1 и y_2:

$$\begin{aligned} &y_1 = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4, \qquad (6.)\\ &y_2 = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10. \end{aligned}$$

Из условий (6.5.) и (6.6.) видно, что новые переменные y_1, y_2 также должны быть неотрицательными.

Какая же теперь перед нами стоит задача? Найти неотрицательные значения переменных x_1,x_2,x_3,y_1,y_2 такие, чтобы они удовлетворяли условиям – равенствам (6.6.) и обращали в максимум линейную функцию этих переменных (то, что в L не входит дополнительные переменные y_1, y_2, неважно: можно считать, что они входят, но с нулевыми коэффициентами). Перед нами – основная задача линейного программирования (ОЗЛП). Переход к ней от первоначальной задачи с ограничениями – неравенствами (6.3.) «куплен» ценой увеличения числа переменных на два (число неравенств).

2.5. Существование решения ОЗЛП и способы его нахождения

Рассмотрим основную задачу линейного программирования (ОЗЛП): найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, …, x_{n}, удовлетворяющие m условиям – равенствам:

$$\begin{aligned} &a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1,\\ &a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2, \qquad (7.)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots...\\ &a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = \mathrm{b}_m \end{aligned}$$

и обращающие в максимум линейную функцию этих переменных:

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \Rightarrow \max. \quad (8.)$$

Для простоты предположим, что все условия (7.) линейно независимы (r=m), и будем вести рассуждения в этом предположении.

Назовём ДОПУСТИМЫМ решением ОЗЛП всякую совокупность неотрицательных значений x_1, x_2, …, x_n, удовлетворяющую условиям (7.).

ОПТИМАЛЬНЫМ назовём то из допустимых решений, которое обращает в максимум функцию (8.).

Требуется найти оптимальное решение. Всегда ли эта задача имеет решение? Нет, не всегда.

1. Может оказаться, что уравнения (7.) вообще несовместимы (противоречат друг другу).

2. Может оказаться и так, что они совместимы, но не в области неотрицательных решений, т.е. не существует ни одной совокупности чисел $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, …, $x_n \geq 0$, удовлетворяющей условиям (7.).

3. Наконец, может быть и так, что допустимые решения ОЗЛП существуют, но среди них нет оптимального: функция L в области допустимых решений не ограничена сверху.

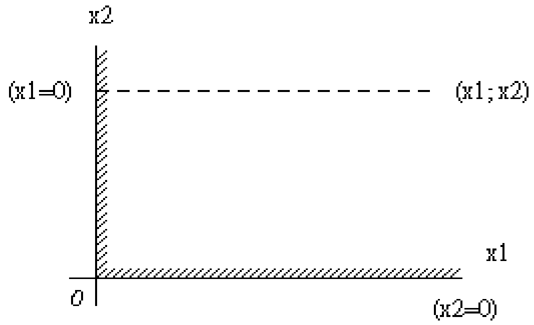

Рисунок 1.

Чтобы представить себе принципиальную сторону ОЗЛП, обратимся к геометрической интерпретации. Пусть число уравнений m на два меньше числа переменных n (n-m=k=2). Такой частный случай даёт возможность геометрической интерпретации ОЗЛП на плоскости.

Мы знаем, что n линейно независимых уравнений (7.) всегда можно разрешить относительно каких-то m базисных переменных, выразив их через остальные, свободные, число которых равно n-m=k (в нашем случае k=2). Предположим, что свободные переменные – это x_1 и x_2 (если это не так, то всегда можно заново перенумеровать переменные), а остальные: x_3, x_4, …, x_n – базисные. Тогда вместо m уравнений (7.) мы получим тоже m уравнений, но записанных в другой форме, разрешённых относительно x_3, x_4, …;

$$\begin{aligned} x_3 &= a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + \beta_3, \\ x_4 &= a_{41}\, x_1 + a_{42}\, x_2 + \beta_4, \qquad\qquad (9.) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \beta_n. \end{aligned}$$

Будем изображать пару значений свободных переменных точкой с координатами x_1, x_2 (рис.

1.). Так как переменные x_1, x_2 должны быть неотрицательными, то допустимые значения свободных переменных лежат только выше оси Ox_1 (на которой x_2=0) и правее оси Ox_2 (на которой x_1=0). Это мы отметим штриховкой, обозначающей «допустимую» сторону каждой оси.

Теперь построим на плоскости x_1Ox_2 область допустимых решений или же убедимся, что её не существует. Базисные переменные x_3, x_4, …, x_n тоже должны быть неотрицательными и удовлетворять уравнениям (7.). Каждое такое уравнение ограничивает область допустимых решений.

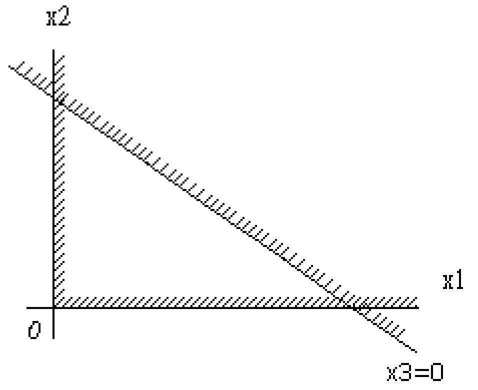

Рисунок 2.

Действительно, положим в первом уравнении (7.) x_3=0; получим уравнение прямой линии:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \beta_3 = 0.$$

На этой прямой x_3=0; по одну сторону от неё x_3>0, по другую – x_3<0. Отметим штриховкой ту сторону (полуплоскость), где x_3>0 (рис. 2.). Пусть эта сторона оказалась правее и выше прямой x_3=0. Значит, вся область допустимых решений (ОДР) лежит в первом координатном угле, правее и выше прямой x_3=0. Аналогично поступим и со всеми остальными условиями (7.). Каждое из них изобразится прямой со штриховкой, указывающей «допустимую» полуплоскость, где только и может лежать решение (рис.2.).

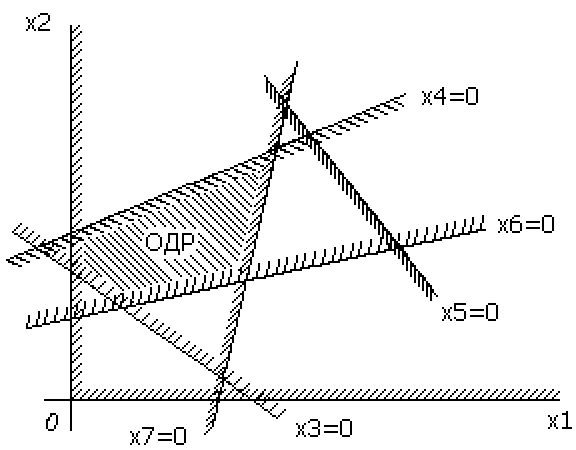

Рисунок 3.

Таким образом, мы построили n прямых: две оси координат (Ox_1 и Ox_2) и n-2 прямых x_3=0, x_4=0, …, x_n=0. Каждая из них определяет «допустимую» полуплоскость, где может лежать решение. Часть первого координатного угла, принадлежащая <u>одновременно всем этим полуплоскостям</u>, и есть ОДР. На рис. 7.3. показан случай, когда ОДР существует, т.е. система уравнений (рис. 3.) имеет неотрицательные решения. Заметим, что этих решений – бесконечное множество, так как любая пара значений свободных переменных, взятая из ОДР, «годится», а из x_1 и x_2 могут быть определены и базисные переменные.

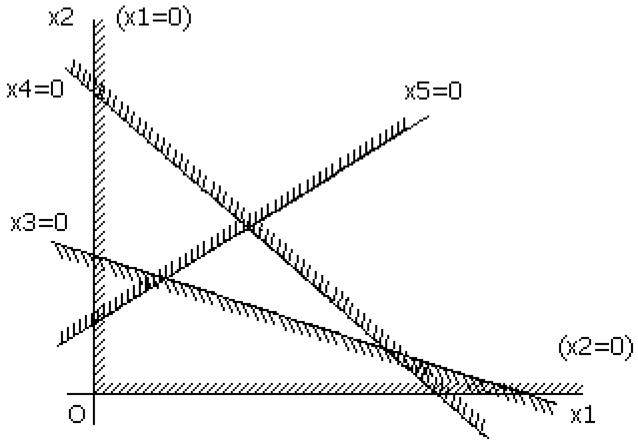

Рисунок 4.

Может оказаться, что область допустимых решений не существует, и значит, уравнения (7.) несовместимы в области неотрицательных значений. Такой случай показан на рис. 4., где нет области, лежащей одновременно по «нужную» сторону от всех прямых. Значит, ОЗЛП не имеет решения.

Предположим, что область допустимых решений существует, и мы её построили. Как же теперь найти среди них оптимальное?

Для этого дадим геометрическую интерпретацию условию (2.) L⇒max. Подставив выражения (3.) в формулу (2.), выразим L через свободные переменные x_1, x_2. после приведения подобных членов получим:

$$L = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_0,$$

где Υ_1, Υ_2 – какие-то коэффициенты, Υ_0 – свободный член, которого в первоначальном виде у функции L не было; теперь, при переходе к переменным x_1, x_2, он мог и появится. Однако мы его тут же и отбросим: ведь максимум линейной функции L достигается при тех же значениях x_1, x_2, что и максимум однородной линейной функции (без свободного члена):

$$L' = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2.$$

Посмотрим, как изобразить геометрически условие L'⇒max. Положим сначала L'=0, т.е. $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = 0,$ и построим на плоскости x_1Ox_2 прямую с таким уравнением; очевидно, она проходит через начало координат (рис. 7.5.)

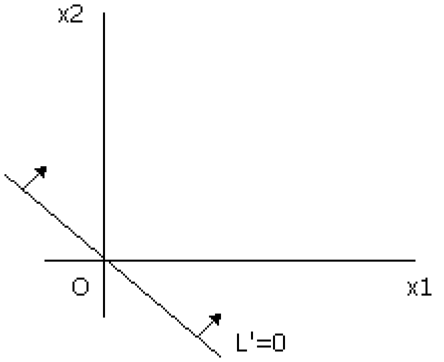

Рисунок 5.

Назовём её «опорной прямой». Если мы будем придавать L’ какие-то значения C_1, C_2, C_3, …, прямая будет перемещаться параллельно самой себе; при перемещении в одну сторону L’ будет возрастать, в другую – убывать. Отметим на рис. 7.5. стрелками, поставленными у опорной рамой, то направление, в котором L’ возрастает. На рис. 7.5. это оказалось направление «направо - вверх», но могло быть и наоборот: всё зависит от коэффициентов γ_1, γ_2. теперь изобразим опорную прямую и ОДР на одном чертеже (7.6.). Давайте будем мысленно двигать опорную прямую параллельно самой себе в направлении стрелок (возрастания L’). Когда L’ достигнет максимума? Очевидно, в точке A (крайней точке ОДР в направлении стрелок). В этой точке свободные переменные принимают оптимальные значения x_1^*,x_2^*, а из них можно по формулам (7.3.) найти и оптимальные значения всех остальных (базисных) переменных x_3^*, x_4^*, …, x_n^*. Заметим, что максимум L’ достигается в одной из вершин ОДР, где, по крайней мере, две из базисных переменных (в нашем случае это x_3 и x_5) обращаются в нуль. Могло бы обращаться в нуль и больше базисных переменных, если бы через точку A проходило более двух прямых x_i=0.

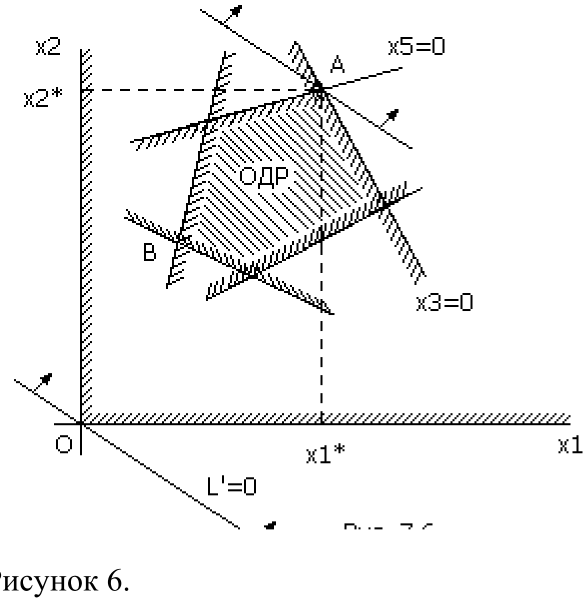

Рисунок 6.

А может ли оказаться, что оптимального решения не существует? Да, может, если в ОДР функция L’ (а значит и L) не ограничена сверху. Пример такого ненормального случая показан на рис. 7. (в разумно поставленных задачах обычно такого недоразумения не возникает).

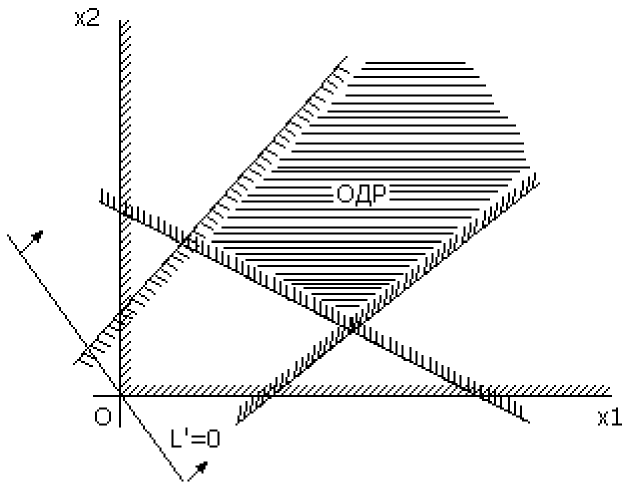

Рисунок 7.

На рис. 7. оптимальное решение существовало и было единственным. А сейчас рассмотрим случай, когда оптимальное решение существует, но не единственно (их бесконечное множество). Это случай, когда максимум L’ достигается не в одной точке A, а на целом отрезке AB, параллельном опорной прямой (рис. 7.8.).

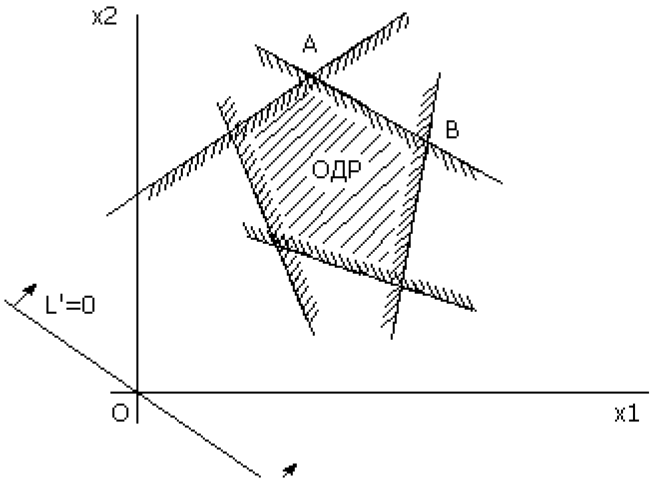

Рисунок 8.

Итак, мы рассмотрели в геометрической интерпретации случай n-m=k=2 и убедились в следующем: *оптимальное решение* (если оно существует) *всегда достигается в одной из переменных* x_1, x_2, …, x_n *равны нулю*.

Оказывается, аналогичное правило справедливо и в случае n-m=k>2 (только геометрическая интерпретация теряет в этом случае свою наглядность). Обойдёмся без доказательства, просто сформулируем это правило.

Оптимальное решение ОЗЛП (если оно существует) *достигается при такой совокупности значений переменных* x_1, x_2, …, x_n, *где, по крайней мере, k из них обращаются в нуль, а остальные неотрицательны.*

При k=2 такая совокупность значений изображается точкой на плоскости, лежащей в одной из вершин многоугольника допустимых решений (ОДР). При k=3 ОДР представляет собой уже не многоугольник, а многогранник, и оптимальное решение достигается в одной из его вершин. При k>3 геометрическая интерпретация теряет наглядность, но всё же геометрическая терминология остаётся удобной. Мы будем продолжать говорить о «многограннике допустимых решений» в k-мерном пространстве, а оптимальное решение (если оно существует) будет достигаться водной из вершин этого многогранника, где, по крайней мере, k переменных равны нулю, а остальные – неотрицательны. Будем для краткости называть такую вершину «опорной точкой», а вытекающее из неё решение «опорным решением».

Отсюда вытекает идея, лежащая в основе большинства рабочих методов решения ОЗЛП, - идея «последовательных проб». Действительно, попробуем разрешить уравнения (7.1.) относительно каких–нибудь m базисных переменных и выразим их через остальные k свободных. Попробуем положить эти свободные переменные равными нулю – авось повезёт, наткнёмся на опорную точку. Вычислим базисные переменные при нулевых значениях свободных. Если все они оказались неотрицательными, значит, нам повезло, мы сразу же получим допустимое (опорное) решение, и его остаётся только оптимизировать. А если нет? Значит, данный выбор свободных и базисных переменных допустимого решения не даёт; точка лежит не на границе, а вне ОДР. Что делать? Надо «пере разрешить» уравнения относительно каких-то других базисных переменных, но не как попало, а так, чтобы это приближало нас к области допустимых решений (для этого в линейном программировании существуют специальные приёмы, на которых мы останавливаться не будем). Пусть, наконец, несколько раз повторив такую процедуру, мы нашли опорное решение ОЗЛП. Но это ещё не всё. Тут надо поставить вопрос: а является ли это решение оптимальным? Выразим функцию L через последние получившиеся свободные переменные и попробуем увеличить их сверх нуля. Если от этого значения L только уменьшается, значит, нам повезло, и мы нашли оптимальное решение, ОЗЛП решена. А если нет? Снова «пере разрешаем» систему уравнений относительно других базисных переменных, и снова не как попало, а так чтобы, не выходя за пределы допустимых решений, приблизиться к оптимальному. И опять- таки для этого в линейном программировании существуют специальные приёмы, гарантирующие, что при каждом новом «пере разрешении» мы будем приближаться к оптимальному решению, а не удаляться от него. На этих приёмах мы тоже здесь не будем останавливаться. После конечного числа таких шагов цель будет достигнута – оптимальное решение найдено. А если его не существует? Алгоритм решения ОЗЛП сам покажет вам, что решения нет.

Для простых задач, где число переменных невелико, такой «слепой перебор» может привести к решению, и довольно быстро. Но на практике часто встречаются задачи, в которых число переменных (и наложенных условий) очень велико, порядка сотен и даже тысяч. Для таких задач простой перебор становится практически невозможным: слишком велико число комбинаций свободных и базисных переменных. Пример: только при n=30 и m=10 число возможных комбинаций свободных переменных с базисными равно, $C_{30}^{10} = 30045015$, т.е. свыше 30 миллионов! А эта задача – далеко не из сложных.

Разработанные в теории линейного программирования вычислительные методы («симплекс-метод», «двойственный симплекс-метод» и другие) позволяют находить оптимальное решение не «слепым» перебором, а «целенаправленным», с постоянным приближением к решению. Добавим, что совместимые ЭВМ, как правило, снабжены подпрограммами для решения задач линейного программирования, так что лицу, желающему их решить, нет даже особой надобности обучаться решению таких задач «вручную» - труд крайне неприятный и изнурительный.